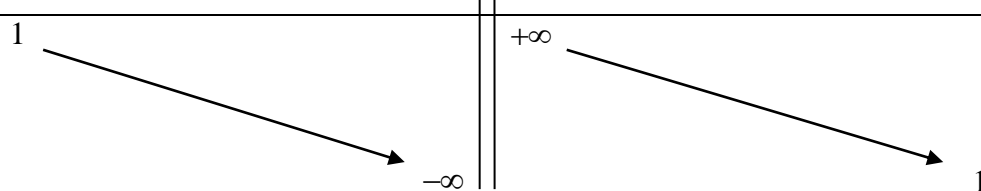
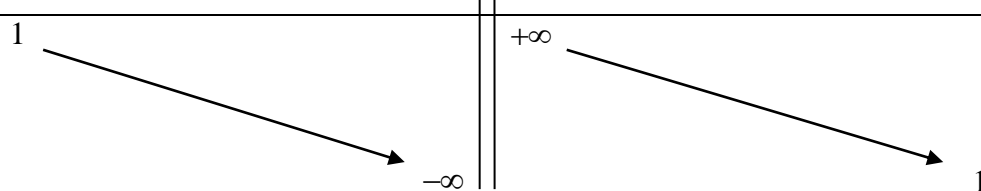
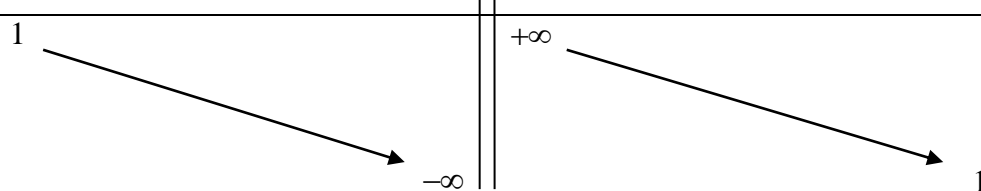
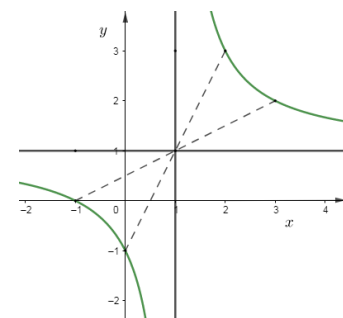
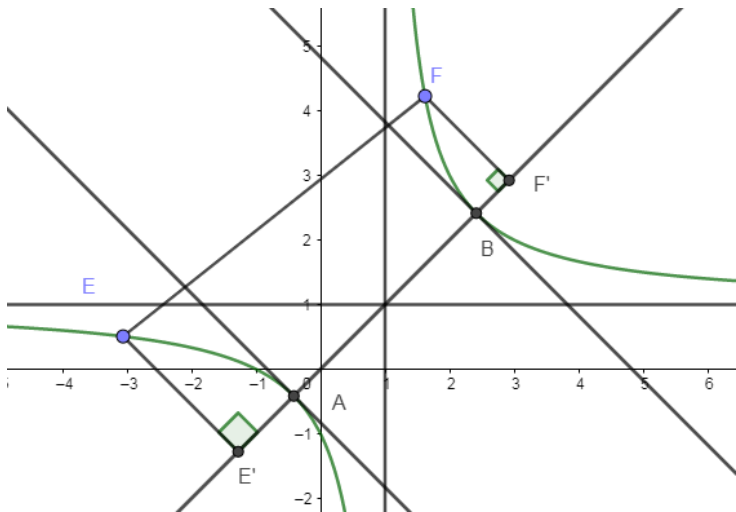
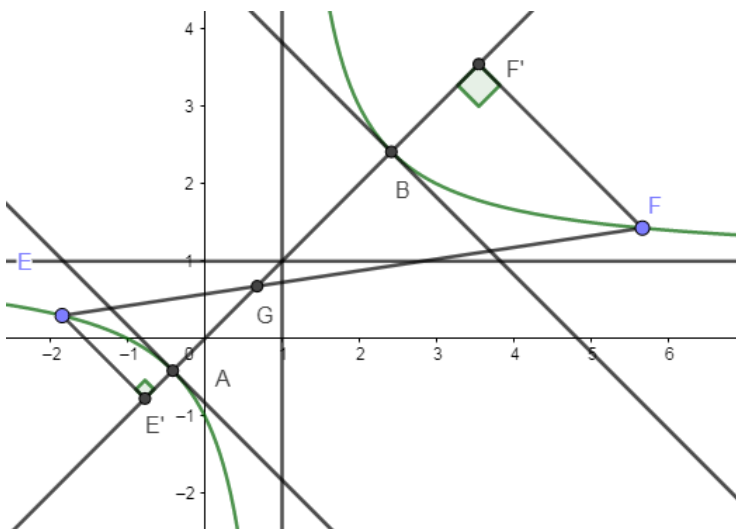


ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu 1. (4 điểm)

Nội dung		Điểm																
Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).																		
a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$.																		
Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.		0.25																
Đạo hàm $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.		0.25																
Sự biến thiên: Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ suy ra $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của (C).		0.25																
$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ suy ra $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của (C).		0.25																
Bảng biến thiên:		0.25																
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td colspan="2"></td><td></td></tr></table>			x	$-\infty$		1		$+\infty$	y'		-		-		y	1		
x	$-\infty$		1		$+\infty$													
y'		-		-														
y	1																	
Nhận xét: Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.		0.25																
Đồ thị Giao với trục hoành: Cho $y = 0$ suy ra $x = -1$ suy ra $(C) \cap Ox$ tại điểm $(-1; 0)$. Giao với trục tung: Cho $x = 0$ suy ra $y = -1$ suy ra $(C) \cap Oy$ tại điểm $(0; -1)$.		0.25																
		0.25																

b) Tìm hai điểm A, B thuộc về hai nhánh của đồ thị (C) sao cho AB ngắn nhất.	
<p>(HS có thể trình bày theo một trong hai cách sau)</p> <p>Cách 1.</p> <p>Đặt $A\left(a+1;1+\frac{2}{a}\right), B\left(1-b;1-\frac{2}{b}\right) \in (C)$</p>	0.25
A, B nằm về hai nhánh của đồ thị khi $1-b < 1 < a+1 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$	0.25
$AB = \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b}\right)^2} = \sqrt{(a+b)^2 + \frac{4(a+b)^2}{a^2b^2}} = \sqrt{(a+b)^2 \left(1 + \frac{4}{a^2b^2}\right)}$	0.5
<p>Áp dụng BĐT AM-GM ta có</p> $(a+b)^2 \geq 4ab; 1 + \frac{4}{a^2b^2} \geq 2.2. \frac{1}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 \left(1 + \frac{4}{a^2b^2}\right) \geq 16$	0.25
Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} a = b \\ 1 = \frac{4}{a^2b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$	0.25
Vậy $AB_{\min} = 4$ khi $A(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}), B(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$	0.5
<p>Cách 2.</p> <p>Từ đồ thị nhận xét rằng AB_{\min} khi A, B chính là giao điểm của đường thẳng $y = x$ và đồ thị (C)</p>	0.5
<p>Giải phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x$ và (C) tìm được</p> $A(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}), B(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2}) \text{ hoặc ngược lại.}$	0.5
<p>Chứng minh:</p> <p>Nhận xét rằng tiếp tuyến tại A, B của (C) vuông góc với đường thẳng $y = x$.</p> <p>Gọi E, F là hai điểm tùy ý nằm trên hai nhánh của (C).</p> <p>Chỉ xảy ra một trong hai trường hợp sau:</p> <p>TH1:</p>	0.5
	
<p>Nếu E, F nằm về cùng một phía với đường thẳng (có thể nằm trên) AB, gọi E', F' lần lượt là hình chiếu của E, F lên AB. Khi đó ta $EF \geq E'F' \geq AB$. Dấu “=” xảy ra khi</p>	

E trùng A và F trùng B .	
<p>TH2:</p>  <p>Nếu E, F không nằm về cùng một phía với đường thẳng (không nằm trên) AB, gọi E', F' lần lượt là hình chiếu của E, F lên AB và $EF \cap AB = G$. Khi đó ta có $EG > E'G, FG > F'G \Rightarrow EF = EG + FG > E'G + F'G = E'F' > AB$.</p>	0.5

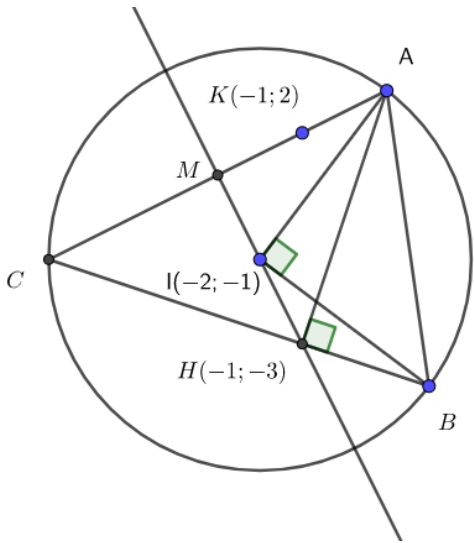
Câu 2. (6 điểm)

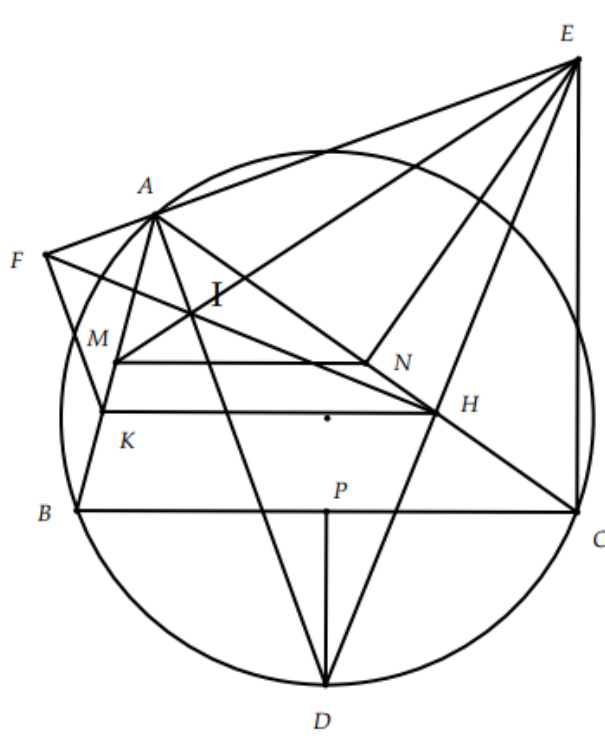
Nội dung	Điểm
a) $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$.	
$(1) \Leftrightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$	0.25
$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + 2) + \sin x (2 \cos^2 x - 1) = 0$	0.25
$\Leftrightarrow \cos 2x (\cos x + 2) + \sin x \cos 2x = 0$	0.25
$\Leftrightarrow \cos 2x (\sin x + \cos x + 2) = 0$	0.25
$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 & (2) \\ \sin x + \cos x = -2 & (3) \end{cases}$	0.5
$(2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$	0.25
(3) vô nghiệm.	0.25
b) Giải hệ phương trình: (I) $\begin{cases} 2xy^2 - y - \sqrt{y^2 + 1} + 2xy^2 \sqrt{4x^2 + 1} = 0 & (1) \\ x^3 - 2\sqrt{2x} \sqrt{y} = 2\sqrt[3]{x+6} + 2 & (2) \end{cases}$	
Điều kiện xác định: $x \geq 0, y \geq 0$	0.25

$(1) \Leftrightarrow xy^2(2+2\sqrt{4x^2+1})=y+\sqrt{y^2+1}$ Nhận xét $y=0$ không phải là nghiệm của hệ đã cho. (Học sinh không nhận xét mất 0.25 điểm toàn bài)	0.25
Với $y > 0$ ta có: $(1) \Leftrightarrow 2x+2x\sqrt{(2x)^2+1}=\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}$	0.25
Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ trên \mathbb{R} ta có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t \in \mathbb{R}$ Suy ra $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} . Từ đó ta có $(1) \Leftrightarrow f(2x)=f\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow 2x=\frac{1}{y} \Leftrightarrow 2xy=1$	0.5
Thế $2xy=1$ vào phương trình (2) ta có $x^3-2=2\sqrt[3]{x+6}+2 \Leftrightarrow x^3-8=2(\sqrt[3]{x+6}-2)$	0.25
$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4-\frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}\right)=0$ $\Leftrightarrow x=2 \vee x^2+2x+4=\frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}$	0.25
Ta có $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>3 \text{ và } \frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}<1, \forall x \geq 0$ suy ra $x^2+2x+4=\frac{2}{(\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt[3]{x+6}+4}$ vô nghiệm. Vậy $(x;y)=\left(2;\frac{1}{4}\right)$ là nghiệm của hệ.	0.25
c) Có 27 tấm thẻ được đánh các số tự nhiên từ 1 đến 27 (mỗi thẻ đánh đúng một số). Rút ngẫu nhiên ba thẻ. Tính xác suất để rút được ba thẻ mà tổng các số được đánh trên ba thẻ chia hết cho 3.	
Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên 3 thẻ trong 27 thẻ”. Ta có $ \Omega =C_{27}^3$. Gọi A là biến cố lấy được ba thẻ mà tổng các số được đánh trên ba thẻ chia hết cho 3.	0.25
Trong các số tự nhiên từ 1 đến 27 có: 9 số chia hết cho 3, 9 số chia 3 được dư là 1, 9 số chia 3 được dư là 2.	0.25
Để tổng các số trên ba thẻ được lấy ra chia hết cho 3 thì chỉ có thể xảy ra một trong các trường hợp sau: TH1. Trong ba thẻ được lấy ra có 1 thẻ được đánh số chia 3 dư 1, 1 thẻ được đánh số	0.25

chia 3 dư 2, 1 thẻ được đánh số chia hết cho 3. Số cách lấy là $C_9^1 C_9^1 C_9^1$	
TH2. Trong ba thẻ được lấy ra có 3 thẻ được đánh số chia 3 dư 1. Số cách lấy là C_9^3	0.25
TH3. Trong ba thẻ được lấy ra có 3 thẻ được đánh số chia 3 dư 2. Số cách lấy là C_9^3	0.25
TH4. Trong ba thẻ được lấy ra có 3 thẻ được đánh số chia hết cho 3. Số cách lấy là C_9^3	0.25
Từ đó suy ra $ A = C_9^1 C_9^1 C_9^1 + C_9^3 + C_9^3 + C_9^3$	0.25
Vậy xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{C_9^1 C_9^1 C_9^1 + C_9^3 + C_9^3 + C_9^3}{C_{27}^3}$	0.25

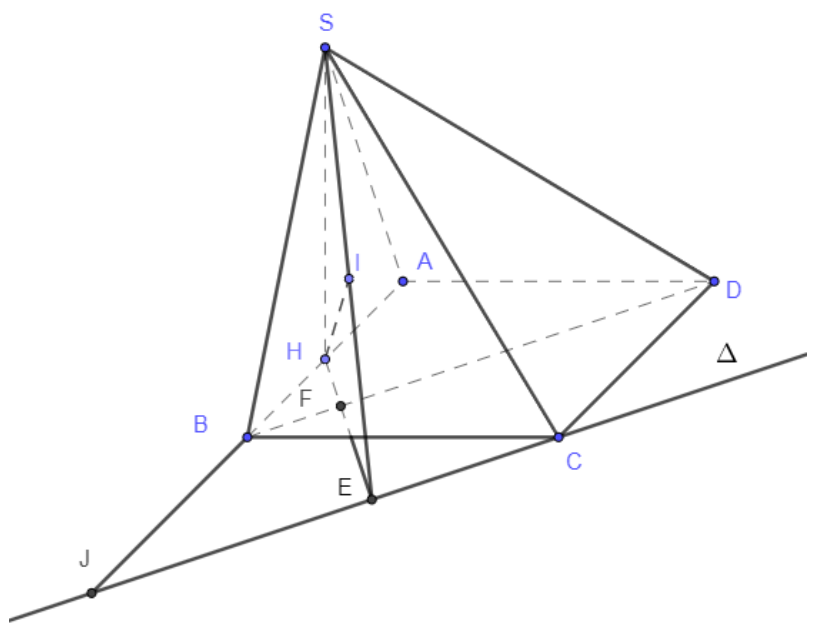
Câu 3. (4 điểm)

Nội dung	Điểm
<p>a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(-2; -1)$, $\widehat{AIB} = 90^\circ$, $H(-1; -3)$ là hình chiếu vuông góc của A lên BC và $K(-1; 2)$ là một điểm thuộc đường thẳng AC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C. Biết rằng điểm A có hoành độ dương.</p>	
	
<p>Gọi $M = IH \cap AC$ Ta có các góc $\angle AHB, \angle AIB$ đều nhìn cạnh AB dưới một góc 90° suy ra tứ giác AIHB nội tiếp suy ra $\widehat{CHI} = \widehat{IAB}$, ta có $\widehat{IAB} = \widehat{IBA} = 45^\circ$ (vì tam giác IAB vuông cân tại I). Mặt khác $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AIB} = 45^\circ$, từ đó suy ra tam giác CHM vuông cân tại M, hay $IH \perp AC$. Hơn nữa tam giác CAH có $\widehat{CHA} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB} = 45^\circ$ suy ra tam giác CAH vuông cân tại H, suy ra M là trung điểm của AC. <i>(HS chứng minh được $IH \perp AC$ và M là trung điểm của AC được 0.5 điểm, HS thừa nhận tính chất không chứng minh mất 0.5 điểm)</i></p>	0.5
Phương trình đường thẳng (AC): $x - 2y + 5 = 0$	0.25

Phương trình đường thẳng (IH): $2x + y + 5 = 0$	0.25
Tọa độ điểm $M(-3;1)$. Điểm $A \in (AC) \Leftrightarrow A(2t-5;t) \Rightarrow C(-2t-1;2-t)$ với $t \in \mathbb{R}$.	0.25
$AH \perp CH \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=3$, loại $t=1$ vì hoành độ A lớn hơn 0. Suy ra $A(1;3), C(-7;-1)$	0.25
Phương trình đường thẳng (BC): $x + 3y + 10 = 0$	0.25
$B(-3m-10;m), m \in \mathbb{R}$ và $IB = IC \Leftrightarrow m = -1 \vee m = -4$, (loại $m = -1$ vì $B \equiv C$). Suy ra $B(2;-4)$.	0.25
<p>b) Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm D. Gọi E là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng AC và đường phân giác ngoài của góc A. Gọi H là giao điểm của DE và AC. Đường thẳng qua H và vuông góc với DE cắt AE tại F. Đường thẳng qua F và vuông góc với AE cắt AB tại K. Chứng minh rằng KH song song BC.</p> 	
<p>Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.</p> <p>Ta có $\frac{MN}{DC} = \frac{PC}{DC} = \cos BCD = \cos \frac{A}{2}$; $\frac{EN}{EC} = \cos NEC = \cos NEA = \cos CAD = \cos \frac{A}{2}$</p> <p>Suy ra $\frac{MN}{DC} = \frac{EN}{EC}$ (1)</p>	0.25
<p>Mặt khác lại có: $\widehat{MNE} = \widehat{MNA} + \widehat{ANE} = \widehat{C} + 90^\circ = \widehat{DCB} + \widehat{C} + \widehat{NCE} = \widehat{DCE}$ suy ra $\widehat{MNE} = \widehat{DCE}$. (2)</p>	0.25

Từ (1) và (2) suy ra tam giác MNE đồng dạng tam giác DCE, do đó $\widehat{MEN} = \widehat{DEC}$ suy ra $\widehat{MEH} = \widehat{NEC} = \widehat{MAD}$ điều này dẫn đến EAMD nội tiếp, suy ra DM vuông góc ME (3)	0.25
Gọi I là giao điểm của EM và AD, ta có $\widehat{IEH} = \widehat{IAH}$ nên AIHE nội tiếp, suy ra IH vuông góc với DE (4)	0.25
Từ (3), (4) và $DA \perp FE$ suy ra I là trực tâm tam giác FDE và F,M,D thẳng hàng.	0.25
Xét $\triangle FMA$ và $\triangle HEA$ có $\widehat{FAM} = \widehat{HAE}$ và $\widehat{FMA} = \widehat{MAD} + \widehat{MDA} = \widehat{AEN} + \widehat{AEM} = \widehat{AEN} + \widehat{NEH} = \widehat{AEH}$ suy ra $\frac{MA}{EA} = \frac{FA}{HA}$ (5)	0.25
Mặt khác dễ thấy $\triangle FKA$ đồng dạng $\triangle NEA$ nên $\frac{KA}{EA} = \frac{FA}{NA}$ (6)	0.25
Từ (5) và (6) suy ra $\frac{MA}{KA} = \frac{NA}{HA}$ suy ra $MN \parallel KH$.	0.25

Câu 4. (3 điểm)

Nội dung	Điểm
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật biết $AB = a, BC = 2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.	
a) Tính thể tích khối chóp $S.ACD$.	
	
Gọi H là trung điểm của AB , vì tam giác SAB đều suy ra $SH \perp AB$, mà $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ suy ra $SH \perp (ABCD)$	0.25
$\triangle SAB$ đều nên $SB = SA = AB = a$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0.25
$ABCD$ là hình chữ nhật suy ra $AC = BD = a\sqrt{5}$	0.25

$V_{S.ACD} = \frac{1}{3} . dt(ACD) . SH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . 2a.a . \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$	0.25
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .	
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $\Delta // BD$, khi đó $d(BD, SC) = d(BD, (\Delta, SC))$	0.25
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $HE \perp \Delta (E \in \Delta)$, HE cắt BD tại F , kéo dài AB cắt Δ tại J . Suy ra $d(BD, SC) = d(BD, (\Delta, SC)) = d(F, (SEC))$	0.25
Tứ giác $BJCD$ là hình bình hành suy ra $BJ = CD$ suy ra $BJ = AB$ mà $\Delta // BD$ suy ra $HJ = \frac{3a}{2}$ và $d(F, (SEC)) = \frac{2}{3} d(H, (SEC))$	0.25
Ta có ΔHEJ đồng dạng ΔDAB suy ra $\frac{HE}{DA} = \frac{HJ}{DB} \Rightarrow HE = \frac{DA.HJ}{DB} = \frac{2a \cdot \frac{3a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$	0.5
Trong mặt phẳng (SHE) dựng $HI \perp SE (I \in SE)$. Ta có $\begin{cases} EC \perp HE \\ EC \perp SH \end{cases} \Rightarrow EC \perp (SHE) \Rightarrow EC \perp HI$ mà $HI \perp SE$ suy ra $HI \perp (SEC) \Rightarrow d(H, (SEC)) = HI$	0.25
ΔSHE cho ta $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{5}{9a^2} = \frac{17}{9a^2} \Rightarrow HI = \frac{3a\sqrt{17}}{17}$	0.25
Từ đó suy ra $d(BD, SC) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{17}}{17} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$	0.25

Câu 5. (2 điểm)

Nội dung	Điểm
Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(a+c) > 0$ và $a \geq \max\{b; c\}$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} > \frac{15}{2}$	
Ta chứng minh: $\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}$ (1) (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ac}{(b+c)(a+b)}} \geq 1$	0.25
Ta có $\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} = \frac{2ab}{2\sqrt{a(b+c)b(a+c)}} \geq \frac{2ab}{bc+ac+2ab}$	0.25
Tương tự ta có	0.25

$\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}} \geq \frac{2ac}{bc+ba+2ac}$	
Từ đó suy ra $\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ac}{(b+c)(a+b)}} \geq 1$ vì $a \geq \max\{b;c\}$	0.25
Xét hàm số $g(t) = t + \frac{11}{2t} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{t^2}}$ trên $(0; +\infty)$ Ta có $g'(t) = \frac{(\sqrt{t^2+7}-4)(2t^2+8\sqrt{t^2+7}+21)}{2t^2\sqrt{t^2+7}}$ Vậy $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (do $t > 0$)	0.25
Lập bảng biến thiên, ta được GTNN của $g(t)$ trên $(0; +\infty)$ là $g(3) = \frac{15}{2}$.	0.25
Ta có $\begin{aligned} \frac{15}{2} \leq g\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}\right) &= \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}} + 2\sqrt{1 + \frac{7(b+c)}{a}} \\ &\leq \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}\right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} \end{aligned}$	0.25
Dấu đẳng thức không xảy ra nên ta có điều cần chứng minh	0.25

Câu 5. (1 điểm)

Nội dung	Điểm
Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2020, u_{n+1} = \frac{2019u_n}{n} + \left(1 + \frac{2019}{n-1}\right)u_{n-1}, n \geq 2$ Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n}\right)$.	
Biến đổi $u_{n+1} = \frac{2019u_n}{n} + \left(1 + \frac{2019}{n-1}\right)u_{n-1} = 2019 \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{i} + 1$	0.25
Suy ra $u_n = \frac{(2019+1)(2019+2)\dots(2019+n-1)}{(n-1)!}, n \geq 2$	0.25
Suy ra $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{2018} - \frac{n!}{2018.2020.2021\dots(2019+n-1)}$	0.25
Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{2018.2020.2021\dots(2019+n-1)} = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{2019}{2018}$	0.25

Chú ý: Mọi lời giải đúng đều được điểm tối đa của câu hỏi đó.